## Тема 1.7. Метод наименьших квадратов

1.7.1. Постановка задачи аппроксимации

1.7.2. Метод наименьших квадратов

1.7.3. Тестовые задания по теме «Аппроксимация функций»

### **1.7.1. Постановка задачи аппроксимации**

Задача аппроксимации (приближения) функции заключается в замене некоторой функции y=f(x) другой функцией g(x, a0, a1, ..., an) таким образом, чтобы отклонение   
g(x, a0, a1, ..., an) от f(x) удовлетворяло в некоторой области (на множестве Х) определённому условию. Если множество Х дискретно (состоит из отдельных точек), то приближение называется точечным, если же Х есть отрезок [a;b], то приближение называется интегральным.

Если функция f(x) задана таблично, то аппроксимирующая функция   
g(x, a0, a1, ..., an) должна удовлетворять определённому критерию соответствия ее значений табличным данным.

Подбор эмпирических формул состоит из двух этапов – выбора вида формулы и определения содержащихся в ней коэффициентов.

Если неизвестен вид аппроксимирующей зависимости, то в качестве эмпирической формулы обычно выбирают один из известных видов функций: алгебраический многочлен, показательную, логарифмическую или другую функцию в зависимости от свойств аппроксимируемой функции. Поскольку аппроксимирующая функция, полученная эмпирическим путем, в ходе последующих исследований, как правило, подвергается преобразованиям, то стараются выбирать наиболее простую формулу, удовлетворяющую требованиям точности. Часто в качестве эмпирической формулы выбирают зависимость, описываемую алгебраическим многочленом невысокого порядка.

Наиболее распространен способ выбора функции в виде многочлена:

,

где φ(x,a0,a1,...,an)=a0φ0(x)+a1φ1(x)+...+amφm(x), а

φ0(x), φ1(x),...,φm(x)–базисные функции (m-степень аппроксимирующего полинома).

Один из возможных базисов – степенной: φ0(x)=1, φ1(x)=х, ..., φm(x)=хm.

Обычно степень аппроксимирующего полинома m<<n, aT=(a0,a1,...,am) – вектор коэффициентов. Если погрешность исходных данных **ε**, то количество базисных функций выбирается так, чтобы **.** Здесь S – численное значение критерия близости аппроксимирующей функции φ(x, a0, a1, ..., an) и табличных данных. Отклонения между опытными данными и значениями эмпирической функции

ei = φ(xi, a0, a1, ..., am) – yi, i = 0,1,2,...,n.

Методы определения коэффициентов выбранной эмпирической функции различаются критерием минимизации отклонений.

### **1.7.2. Метод наименьших квадратов**

Одним из способов определения параметров эмпирической формулы является метод наименьших квадратов. В этом методе параметры a0, a1, ..., anопределяются из условия минимума суммы квадратов отклонений аппроксимирующей функции от табличных данных.

Вектор коэффициентов aT определяют из условия минимизации



где (n+1) – количество узловых точек.

Условие минимума функции Е приводит к системе линейных уравнений относительно параметров a0, a1, ..., am. Эта система называется системой нормальных уравнений, её матрица – **матрица Грама**. Элементами **матрицы Грама** являются суммы скалярных произведений базисных функций



Для получения искомых значений параметров следует составить и решить систему (m+1) уравнения



Пусть в качестве аппроксимирующей функции выбрана линейная зависимость y= a0+a1x . Тогда

.

Условия минимума:



Тогда первое уравнение имеет вид



Раскрывая скобки и разделив на постоянный коэффициент, получим

.

Первое уравнение принимает следующий окончательный вид:

.

Для получения второго уравнения,приравняем нулю частную производную по а1:

.

.

Система линейных уравнений для нахождения коэффициентов многочлена  (линейная аппроксимация):



Введем следующие обозначения  - средние значения исходных данных. Во введенных обозначениях решениями системы являются



 .

В случае применения метода наименьших квадратов для определения коэффициентов аппроксимирующего многочлена второй степени y=a0+a1x+а2х2 критерий минимизации имеет вид

.

Из условия получим следующую систему уравнений:



Решение этой системы уравнений относительно а0, а1, а2 позволяет найти коэффициенты эмпирической формулы - аппроксимирующего многочлена 2-го порядка. При решении системы линейных уравнений могут быть применены численные методы.

В случае степенного базиса (степень аппроксимирующего полинома равна m) матрица Грама системы нормальных уравнений G и столбец правых частей системы нормальных уравнений имеют вид

**G** =  

В матричной форме система нормальных уравнений примет вид:

.

Решение системы нормальных уравнений



найдется из выражения 

В качестве меры уклонения заданных значений функции y0, y1, ..., yn от многочлена степени m - φ(x)=a0 φ0(x)+a1 φ1(x)+...+am φm(x) , принимается величина



**(n+1)** – количество узлов, m – степень аппроксимирующего многочлена, n+1>=m.

На рис.1.7.2-1 приведена укрупненная схема алгоритма метода наименьших квадратов.

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.7.2-1. Укрупненная схема алгоритма метода наименьших квадратов

Данная схема алгоритма метода наименьших квадратов является укрупненной и отражает основные процессы метода, где n+1 – количество точек, в которых известны значения хi, yi; i=0,1,…, n**.**

Блок вычисления коэффициентов предполагает вычисление коэффициентов при неизвестных с0, с1, …, сm и свободных членов системы из m+1 линейных уравнений.

Следующий блок – блок решения системы уравнений – предполагает вычисление коэффициентов аппроксимирующей функции с0, с1, …, сm.

Далее вычисляется невязка



**Пример 1.7.2-1.** **Аппроксимировать следующие данные многочленом второй степени, используя метод наименьших квадратов.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0.78 | 1.56 | 2.34 | 3.12 | 3.81 |
| y | 2.50 | 1.20 | 1.12 | 2.25 | 4.28 |

Запишем в следующую таблицу элементы матрицы Грамма и столбец свободных членов:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | **x** | **x2** | **x3** | **x4** | **y** | **xy** | **x2y** |
| 0 | 0.78 | 0.608 | 0.475 | 0.370 | 2.50 | 1.950 | 1.520 |
| 1 | 1.56 | 2.434 | 3.796 | 5.922 | 1.20 | 1.872 | 2.920 |
| 2 | 2.34 | 5.476 | 12.813 | 29.982 | 1.12 | 2.621 | 6.133 |
| 3 | 3.12 | 9.734 | 30.371 | 94.759 | 2.25 | 7.020 | 21.902 |
| 4 | 3.81 | 14.516 | 55.306 | 210.72 | 4.28 | 16.307 | 62.129 |
| ∑ | 11.61 | 32.768 | 102.76 | 341.75 | 11.35 | 29.770 | 94.604 |

Система нормальных уравнений выглядит следующим образом



Решением этой системы являются:

а0 = 5.022; а1 =-4.014; а2=1.002.

Искомая аппроксимирующая функция



Сравним исходные значения yсо значениями аппроксимирующего многочлена, вычисленными в тех же точках:



Вычислим среднеквадратическое отклонение (невязку)

.

### **1.7.4. Тестовые задания по теме «Аппроксимация функций»**

1. **Аппроксимация – это**
2. получение функции более простого вида, описывающей исходную с достаточной степенью точности
3. частный случай интерполяции
4. замена исходной функции функцией другого вида
5. в списке нет правильного ответа
6. **Функция, приближенно описывающая таблично заданную функцию, это**
7. интерполирующая функция
8. аппроксимирующая функция
9. алгебраическая функция
10. интегрирующая функция
11. **Полином, построенный по таблично заданной функции, обеспечивающий полное совпадение в используемых для его построения точках**
12. алгебраический полином
13. аппроксимирующий
14. интерполирующий полином
15. интегрирующий полином
16. **Для построения аппроксимирующего многочлена 2-й степени должно быть как минимум**
17. два узла
18. один узел
19. пять узлов
20. три узла
21. **Система нормальных уравнений содержит два уравнения, если проводится аппроксимация**
22. полиномом 1-й степени
23. полиномом 3-й степени
24. полиномом 2-й степени
25. полиномом четной степени
26. **Критерием близости аппроксимируемой и аппроксимирующей функций при использовании метода наименьших квадратов служит**
    1. минимум суммы квадратов отклонений аппроксимируемой и аппроксимирующей функций
    2. минимум суммы квадратов аппроксимирующей функции
    3. минимум суммы квадратов значений аргументов в таблице
    4. в списке нет правильного ответа
27. **Термином, используемым при решении задачи аппроксимации, является**
28. невязка
29. уравнение
30. градиент
31. оптимум
32. **Аппроксимировать функцию, заданную таблицей из 20-ти точек, многочленом квадратичной функцией**
33. нельзя
34. можно
35. можно только полиномом 19-й степени
36. в списке нет правильного ответа
37. **В методе наименьших квадратов параметры аппроксимирующей функции определяются из условия**
38. минимума максимального отклонения аппроксимирующей функции от аппроксимируемой на интервале приближения
39. минимума суммы квадратов отклонений аппроксимирующей функции от аппроксимируемой на конечном множестве точек из интервала приближения
40. равенства аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в конечном множестве точек из интервала приближения
41. минимума среднего значения модулей отклонений аппроксимирующей и аппроксимируемой функций на конечном множестве точек из интервала приближения
42. в списке нет правильного ответа

1. **С увеличением количества узлов аппроксимации точность аппроксимации**
2. уменьшается
3. не меняется
4. увеличивается
5. усложняется
6. **Матрица системы нормальных уравнений называется**
7. матрицей Гессе
8. матрицей Сильвестра
9. матрицей Грама
10. матрицей Гаусса

1. **Степень аппроксимирующего полинома (m) в методе наименьших квадратов выбирается из соотношения с количеством узлов таблично заданной функции (n)**
2. m > n
3. m = n
4. m < n
5. m  n

1. **Мерой погрешности аппроксимации в точке служит**
2. минимальное (по модулю) уклонение аппроксимирующей и аппроксимируемой функций
3. максимальное (по модулю) уклонение аппроксимирующей и аппроксимируемой функций
4. среднеквадратичное уклонение аппроксимирующей и аппроксимируемой функций
5. в списке нет правильного ответа
6. **Элементы матрицы Грама являются**
7. скалярным произведением базисных функций
8. суммой скалярных произведений базисных функций
9. векторными произведениями базисных функций
10. суммой произведений базисных функций
11. **Для построения аппроксимирующей функции метод наименьших квадратов используется, когда** 
    1. набор экспериментальных данных велик
    2. набор экспериментальных данных получен с погрешностью
    3. неприменимы интерполяционные функции
    4. в списке нет правильного ответа
12. **Сумма квадратов отклонений аппроксимируемой функции  от аппроксимирующей функции  в точках  равна**
    1. 12.765
    2. 9.005
    3. 3.546
    4. 10.83
13. **Сумма квадратов отклонений аппроксимируемой функции  от аппроксимирующей функции  в точках  равна**
14. 1.65
15. 0.005
16. 3.546
17. 0.32
18. **Сумма квадратов отклонений аппроксимируемой функции  от аппроксимирующей функции  в точках  равна**
19. 0.055
20. 0.765
21. 1.304
22. 3.546
23. **Среднеквадратическое отклонение аппроксимируемой функции  от аппроксимирующей функции  в точках  равно**
24. 0.238
25. 1.650
26. 2.005
27. 3.546
28. **Среднеквадратическое отклонение аппроксимируемой функции  от аппроксимирующей функции  в точках  равно**
29. 0.19
30. 1.39
31. 2.00
32. 3.54
33. **Линейная аппроксимация таблично заданной функции с применением метода наименьших квадратов позволила получить аппроксимирующую функцию вида**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 3 | 4 |
| у | 1 | 3 | 5 |

1. 
2. 
3. 
4. 
5. **Линейная аппроксимация таблично заданной функции с применением метода наименьших квадратов позволила получить аппроксимирующую функцию вида**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 3 | 4 | 5 |
| у | 5 | 2 | 3 |

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. **Линейная аппроксимация таблично заданной функции с применением метода наименьших квадратов позволила получить аппроксимирующую функцию вида**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 2 | 5 | 6 |
| у | 5 | 1 | 0.5 |

1. 
2. 
3. 
4. 
5. **Линейная аппроксимация таблично заданной функции с применением метода наименьших квадратов позволила получить аппроксимирующую функцию вида**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 | 3 |
| у | 1 | 3 | 9 |

* 1. 
  2. 
  3. 

1. **Линейная аппроксимация таблично заданной функции с применением метода наименьших квадратов позволила получить аппроксимирующую функцию вида**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 | 3 |
| у | 0.5 | 1 | 0.8 |

1. 
2. 
3. 
4. 
5. **Среднеквадратическое отклонение для оценки качества аппроксимации, таблично заданной функции многочленом первой степени равно**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 2 | 3 | 5 |
| у | 7 | 5 | 6 |

* 1. 1.087
  2. 2.555
  3. 3.876
  4. 0.772

1. **Среднеквадратическое отклонение для оценки качества аппроксимации, таблично заданной функции многочленом первой степени равно**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 2 | 3 | 4 |
| у | 1 | 1.5 | 3 |

1. 0.007
2. 2.00
3. 3.876
4. 0.236
5. **Линейная аппроксимация функции  в точках  с применением метода наименьших квадратов позволила получить аппроксимирующую функцию вида** 
   1. 
   2. 
   3. 
   4. 
6. **Линейная аппроксимация функции  в точках  с применением метода наименьших квадратов позволила получить аппроксимирующую функцию вида**
7. 
8. 
9. 
10. 